et montrons que $\left|U_{n+1}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

On a : $\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \Rightarrow \frac{2}{3}\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Or $\left|U_{n+1}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \leq \frac{2}{3}\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \Rightarrow \left|U_{n+1}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$.

b) On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=0$ car $-1<\frac{2}{3}<1$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Solution 9 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	1

2°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $-\frac{1}{3} \leq U_n \leq 0$.

On a : $U_0=0$ donc $-\frac{1}{3} \leq U_0 \leq 0$

Supposons que $-\frac{1}{3} \leq U_n \leq 0$ et montrons que $-\frac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ _ donc :

$-\frac{1}{3} \leq U_n \leq 0 \Rightarrow f(0) \leq f(U_n) \leq f(-\frac{1}{3})$